1. Si $A \in L(H)$ es autoadjunto, probar que está definido el operador $U = e^{iA}$, y que es un operador unitario. Probar que si $\|A\| < \pi$, entonces $\|U - I\| = 2\sin(\|A\|/2)$.

2. Si $A \in L(H)$ es un operador autoadjunto, y Δ es un subconjunto boreliano de $\sigma(A)$, denotemos con E_Δ el operador que resulta de aplicar el cálculo boreliano de A a la función (boreliana y acotada) χ_Δ (función característica del conjunto Δ). Probar que

   (a) E_Δ es un proyector autoadjunto, $E_\emptyset = 0$, $E_{\sigma(A)} = I$.

   (b) $E_{\Delta_1 \cap \Delta_2} = E_{\Delta_1} E_{\Delta_2} = E_{\Delta_2} E_{\Delta_1}$.

   (c) Si Δ_n son una familia de borelianos disjuntos dos a dos y $\Delta = \cup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$, entonces

   $$E_\Delta \xi = \sum_{n=1}^{\infty} E_{\Delta_n} \xi,$$

   para cada $\xi \in H$ (la serie converge en H).

   (d) Si $B \in L(H)$ cumple que $BE_\Delta = 0$ para todo boreliano Δ, entonces $BA = 0$.

3. (a) Sea $A = M_t$ (multiplicar por la variable) en $L^2[0,1]$. Probar que si $B \in \mathcal{L}(L^2[0,1])$ satisface $BA = AB$, entonces $B = M_f$, para cierta $f \in L^\infty[0,1]$.

   (b) Sea $A \in L(H)$ autoadjunto tal que $\sigma(A) = [0,1]$, con un vector cíclico ξ_0 en H. Probar que si $B \in L(H)$ satisface $BA = AB$, entonces existen polinomios p_n tales que

   $$p_n(A)\xi \to B\xi$$

   para todo $\xi \in H$.

   (c) Idem al item anterior, quitando la hipótesis "$\sigma(A) = [0,1]$".

4. Sea $K \in L(H)$ compacto (no necesariamente autoadjunto). Probar que existen dos sistemas de vectores ortonormales $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ en H, y números poitivos s_n (llamados valores singulares de K) tal que para cada $\xi \in H$,

   $$K\xi = \sum_{n \geq 1} s_n < \xi, f_n > g_n.$$

   (Sugerencia: tomar s_n los autovalores no nulos de $|K|$).

5. Porbar que si A es autoadjunto y $A = V|A|$ es la descomposición polar de A, entonces V y $|A|$ conmutan, y que V^2 es un proyector autoadjunto. Si además $\ker A = \{0\}$, entonces V es una simetría: V inversible y $V^* = V = V^{-1}$.